

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE TANGER
DÉPARTEMENT DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

MIPCI
Semestre I CC₂

Année Universitaire 06-07

Durée 02h

Exercice 1:

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{2\sqrt{x^2 + 1}} e^{\arctan x}$$

- 1) Donner les développements limités à l'ordre 3 :
 - a) de la fonction f au voisinage de 0;
 - b) de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x} f(x)$ au voisinage de $+\infty$
 - c) de la fonction $x \rightarrow \frac{f}{x}(x)$ au voisinage de $-\infty$
- 2) Faire un tableau de variations de f et tracer sa courbe.

Exercice 2:

- 1.) Calculer les intégrales:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)(x + 1)} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{3 + \cos x}$$

- 2.) Etudier la convergence des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 5}, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

- 3.) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^\alpha} \quad a \in \mathbb{R}^*$$

est-elle convergente?

Exercice 3: Résoudre les équations différentielles suivantes

- 1.) $y' \sqrt{x} - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$, $x \in [0, +\infty[$
- 2.) Ecrivez la solution générale de l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 1 1/ $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{2\sqrt{x^2 + 1}} e^{\arctan x}$

1/ a) $DL_3(0)$: On a $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$e^{\arctan x} = e^{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = 1 + (x - \frac{x^3}{3}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{3})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{3})^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 3x + 2)(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))$
 $= \frac{1}{2}(2 - x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3))$

b/ $g(x) = \frac{1}{x} f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{2x\sqrt{x^2 + 1}} e^{\arctan x}$ On pose $x = \frac{1}{X}$; Rappel $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$

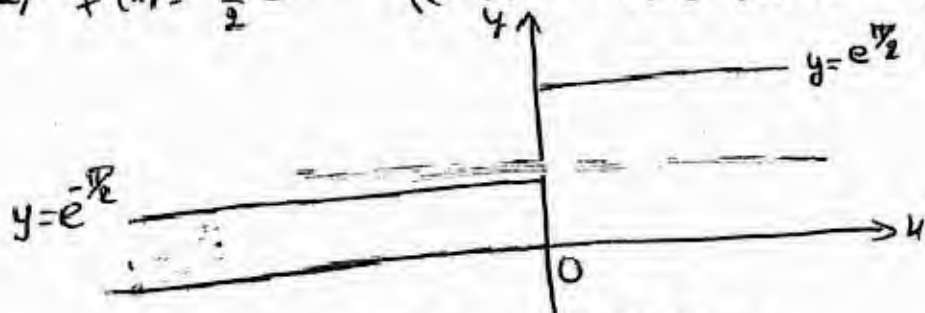
$= \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 2}{\frac{2}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} e^{\arctan \frac{1}{x}} = \frac{2x^2 - 3x + 2}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\frac{\pi}{2} - \arctan x}$

$= \frac{e^{\pi/2}}{2} (2x^2 - 3x + 2)(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))(1 - x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = \frac{e^{\pi/2}}{2} (2 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3}))$

c/ $g(x) = \frac{1}{x} f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{2x\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 - 3x + 2}{2\sqrt{1+x^2}} e^{-\pi/2 - \arctan x}$ ($x = \frac{1}{x}$)

$= \frac{e^{-\pi/2}}{2} (2x^2 - 3x + 2)(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))(1 - x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = \frac{e^{-\pi/2}}{2} (2 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3}))$

2/ $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\arctan x} \frac{(x+1)(2x^2-1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$



x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
f	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow	\searrow

D_1 : $y = e^{\pi/2}$ A.O. en $+\infty$

D_2 : $y = e^{-\pi/2}$ A.O. en $-\infty$

Exercice 3 1/ (E): $y' \sqrt{x} - y + (x + 2\sqrt{x})y = 0$ on pose $u = \sqrt{y}$ car $y = u^2$; $y' = 2uu'$

L'eq devient (F): $2uu' \sqrt{x} - u^2 + (x + 2\sqrt{x})u = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $2u' \sqrt{x} - u = -x - 2\sqrt{x}$

• (F'): $2u' \sqrt{x} - u = 0 \Rightarrow \frac{u'}{u} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|u| = \frac{1}{2}\sqrt{x} + K \Rightarrow u_1 = C e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}$ sol de (F')

• Determiner u_0 sous la forme $u_0 = C e^{\sqrt{x}}$, équation particulière de (F)

$u_0' = C' e^{\sqrt{x}} + C \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$; $2u_0' \sqrt{x} - u_0' = -x - 2\sqrt{x} \Rightarrow 2C' \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} = -x - 2\sqrt{x}$

$\Rightarrow C' = \frac{-x - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} + 1) e^{-\sqrt{x}} \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \int (\sqrt{x} + 1) e^{-\sqrt{x}} dx$

On pose $t = \sqrt{x}$ car $x = t^2$, $dx = 2t dt \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \int (t+1) e^{-t} (2t) dt$

$C = -\int (t^2 + t) e^{-t} dt$ (on intègre 2 fois et on trouve) $C = (x + 2\sqrt{x} + 3) e^{-\sqrt{x}}$

d'où $u_0 = x + 2\sqrt{x} + 3$ et $u = x + 2\sqrt{x} + 3 + C e^{\sqrt{x}} \Rightarrow y = (x + 2\sqrt{x} + 3 + C e^{\sqrt{x}})^2$

2/ (E): $y'' + 2y' + y = x e^{-x}$ • (E'): $y'' + 2y' + y = 0$; $r^2 + 2r + 1 = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = -1$

$y_1 = (x + \beta) e^{-x}$ sol de (E')

• La solution particulière de (E) est de la forme $y_0 = x^2(\alpha x + \beta) e^{-x}$ car $\lambda = -1$ racine double de l'eq caractéristique : $y_0'' + 2y_0' + y_0 = x e^{-x} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{6} x^3 e^{-x} + (\alpha x + \beta) e^{-x}$

Exercice 2

$$1/ I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \text{Arctan } x + \ln|x+1| \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} + \ln 2 \right) = \frac{\pi + 2 \ln 2}{8}$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3+\cos x} dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3+\cos x} dx \quad (x \mapsto \frac{\sin^2 x}{3+\cos x} \text{ est paire})$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos^2 x}{3+\cos x} dx = 2 \int_0^{\pi} \left(3-\cos x - \frac{8}{3+\cos x} \right) dx \quad \frac{1-x^2}{x+3} = -x+3 - \frac{8}{3+x}$$

$$= 2 \int_0^{\pi} 3-\cos x dx - 16 \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\cos x} dx = 2 [3x - \sin x]_0^{\pi} - 16 K = 6\pi - 16 K$$

$$K = \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\cos x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}}{dt} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{4+t^2} dt$$

On pose $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}(1+t^2) dx$
 si $x=0$ alors $t=0$
 si $x=\pi$ alors $t=+\infty$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan} \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \sqrt{2}}{4}$$

d'où $J = 6\pi - 4\pi\sqrt{2}$

2/a) On a: $|I_n| = \left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^{3/2}} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$

on a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ c.v donc I_n converge ($\alpha = 3/2 > 1$)

b) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\text{Arctan} \frac{x}{\sqrt{5}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \Rightarrow I_2$ c.v

c) $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \left[\text{Arctan}(x+1) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi \Rightarrow I_3$ c.v

3/ $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha} dx$

• la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha} dx$ c.v

• Au voisinage de $+\infty$: $x^2+a^2 \sim x^2 \Rightarrow \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx$ c.v $\Leftrightarrow 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1/2$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha} dx$ c.v si et seulement si $\alpha > 1/2$

Ainsi I_n c.v $\Leftrightarrow \alpha > 1/2$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..